Студенты часто путают систему обыкновенных ДУ и ДУ в частных производных. Обсудим разницу.
Вот пример ДУ в частных производных:
$$u_x + u_y = f(u, x, y)$$
Оно же
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = f(u, x, y)$$
Его решение – u(x,y) – функция двух переменных. В пространстве трёх переменных u,x,y решение представляет собой поверхность. Т.е. у нас две степени свободы.
А вот система ДУ:
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x, y, t) \\ \dfrac{dy}{dt} = Y(x, y, t) \end{cases}$$
Где у нас также три переменных (x, y и t), имеет решение уже в виде кривой с уравнением $x(t)$ и $y(t)$:

И тут уже одна степень свободы – было три переменных, у нас два ДУ, так что осталось одна. А вот в $u_x + u_y = f(u, x, y)$ три переменных, одну степень свободы съело ДУ в частных производных, осталось две.

Разница между обыкновенным ДУ (или системой обыкновенных ДУ) и ДУ в частных производных (ЧП) как раз в числе степеней свободы. Не важно, сколько переменных - в обыкновенном ДУ всегда одна степень свободы, в ДУ в ЧП – две или больше.
Именно число свобод определяет то, можем ли мы свободно перекидывать дифференциалы. В ОДУ мы, во-первых, всегда писали «d» вместо «∂», во-вторых, свободно перекидывали дифференциалы. Потому что одна степень свободы, матан-1. Как только у нас ДУ в ЧП – начинается матан-2. В ДУ в ЧП
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = f(u, x, y)$$
Зелёное ∂u – это $u(x + \Delta x, y) - u(x, y)$, а красное ∂u – это $u(x, y + \Delta y) - u(x, y)$. И они разные! Поэтому никаких
$$\partial u \left(\frac{1}{\partial x} + \frac{1}{\partial y} \right) = f(u, x, y)$$
быть не может.
Именно поэтому ДУ в ЧП гораздо сложнее, чем ОДУ. Вы им посвятите 5-й и 6-й семестр и лишь краешком коснётесь в 4-м.

Теперь очередь читателя. Определите для каждого примера, ОДУ ли это или ДУ в ЧП:

1) $\Delta u \left(\text{т. е.} \, u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \right) + u_{tt} = f(x, y, z, t)$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x, y, t) \\ F\left(\dfrac{dy}{dt}, x, y, t\right) = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = x + 2y \\ x = \sin(y) \end{cases}$

4) $\dfrac{dx}{1+xy} = \dfrac{dy}{u-x} = \dfrac{du}{y+u}$

Комментарии:

1) Разумеется, ДУ в ЧП, на четыре переменных одно уравнение
2) Система ДУ с 1 степенью свободы, несмотря на неявность второго ДУ – нам это не важно
3) Изначально ДУ в ЧП, но если выразить x из второго уравнения, можно свести к ОДУ в переменных u и y.
4) Система ДУ. Три переменных, два равенства.

Уравнения Максвелла, кстати, разумеется, тоже ДУ в ЧП. ***Вообще ДУ в ЧП встречаются в физике примерно в 100 раз чаще, чем ДУ.***

Хорошо, а как решать ДУ в ЧП? Это гораздо сложнее, чем ДУ. В 4-м семе вы будете рассматривать лишь ДУ первого порядка, т.е. вида

$$F(u, u_x, u_y, u_z, x, y, z) = 0$$

Т.е. без даже вторых производных.

Основным понятием в ДУ с ЧП являются характеристики.

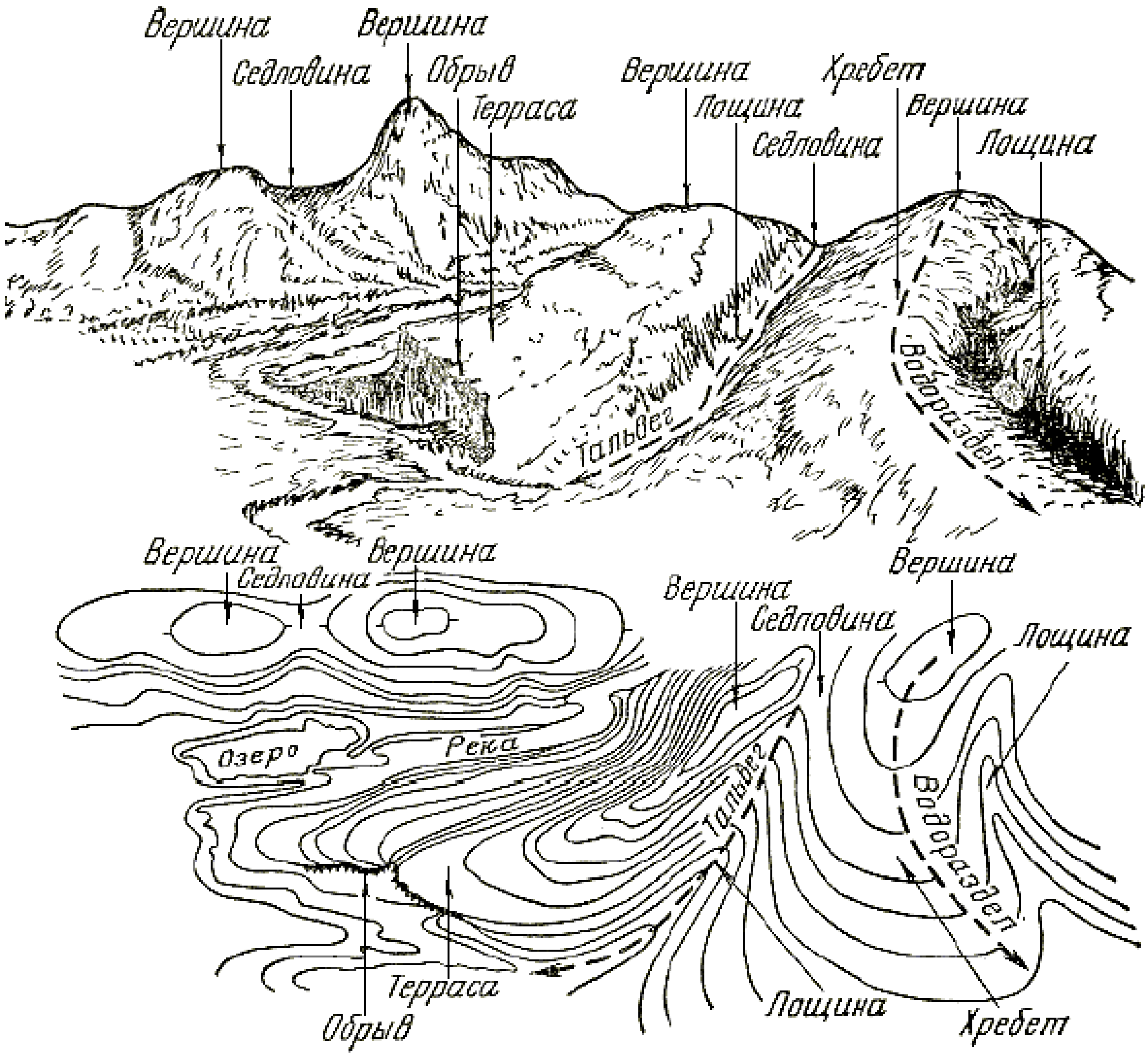
Определение. Характеристикой функции u(x,y) является кривая в плоскости OXY, задаваемая уравнением u(x,y)=C.

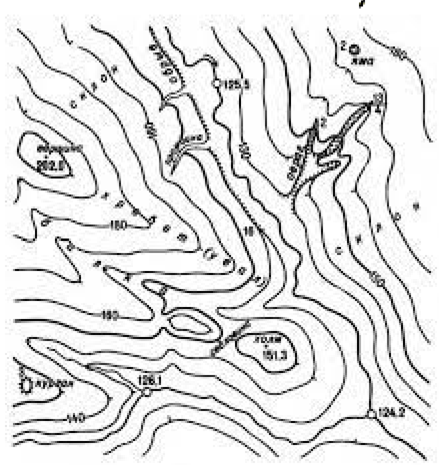
И тут я приведу аналогию… с географией. У вас это наверняка было на географии в классе так с 6-м и 7-м:

Рис. 33. Изображение на карте горизонталями типовых фор
и деталей рельефа

В географии тоже есть характеристики, только там они называются горизонталями. В роли u там высота местности. Горизонтали – это кривые, где все точки находятся на одной высоте (см. рисунок выше).

Вот вам ещё рисунки, чтобы вы точно вспомнили (ну, наверняка было в школе на географии!)





Давайте получим уравнение горизонталей-характеристик.

Говорите, на них значение u(x,y)=константе C (имеющей смысл высоты)? Так и запишем:
u(x,y)=C
du(x,y)=0
Помним из матана-2, как считать дифференциал сложной функции? Конечно:

$$u_x dx + u_y dy = 0 \ (1)$$

А вот вам немного другая задача: ДУ в частных производных

$$u_x X(x, y, u) + u_y Y(x, y, u) = 0(2)$$

Предположим, что функция u(x,y) является решением ДУ. Тогда у неё есть характеристики. Каждая из них задаётся уравнением

$$u_x dx + u_y dy = 0 \ (1)$$

Давайте сравним (1) и (2). Не правда ли, есть что-то общее? ☺ Да, именно отсюда получается уравнение характеристики, которые вы наверняка писали

$$\frac{dx}{dX(x, y, u)} = \frac{dy}{dY(x, y, u)} \ (3)$$

Для большего числа переменных

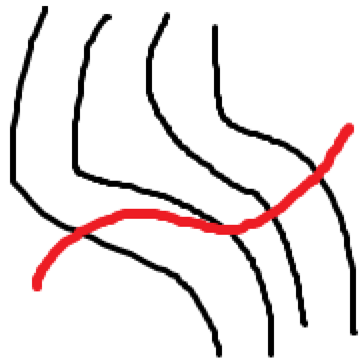
$$u_x X(x, y, z, u) + u_y Y(x, y, z, u) + u_z Z(x, y, z, u) = 0$$

имеем уже

$$\frac{dx}{dX(x, y, z, u)} = \frac{dy}{dY(x, y, z, u)} = \frac{dz}{dZ(x, y, z, u)}$$

Смотрите, в чём прикол.
1. Для обыкновенных ДУ, решая его, вы получаете решение с одной или несколькими константами. А чтобы найти константы – извольте дать начальные условия, одну или несколько констант.
Здесь мы из ДУ в ЧП сможем лишь выцепить уравнение характеристик – кривых в N-мерном пространстве. А вот число, соответствующее каждой характеристике – это уже ДУ не сообщит, извольте сами.

Так что вместо начальных условий (одной или нескольких констант) нам нужно задать значение u на каждой характеристике. Как правило, это делается вот такой вот кривой



на которой u задаётся вручную. Если она пересекает все характеристики ровно по разу, то она устанавливает на каждой своей u.
В случае большей размерности нам уже потребуется поверхность:

ну и далее пространство-гиперпространство-ты-ры пыры.

2. Подобный способ нахождения характеристик пригоден лишь для квазилинейных ДУ с ЧП. Что такое квализинейные уравнения? Сравните: общий вид

$$F(u, u_x, u_y, u_z, x, y, z) = 0$$

квазилинейное:

$$u_x X(x, y, z, u) + u_y Y(x, y, z, u) + u_z Z(x, y, z, u) = 0$$

Т.е. мы требуем, чтобы относительно производных уравнение было линейным.

Теперь очередь читателя. Найти среди уравнений

$$u_x u_y = u_z$$

$$u_x(y + \sin(z)) = u_z + z u_y$$

$$u_x = \frac{\sin xz}{u_y + 1} + 1$$

Квазилинейное и найти для него характеристики.

Решение. Конечно, это уравнение

$$u_x(y + \sin(z)) = u_z + z u_y$$

Только давайте всё в одну часть перенесём:

$$u_x(y + \sin(z)) - z u_y - u_z = 0$$

Тогда уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{y + \sin z} = \frac{dy}{-z} = \frac{dz}{-1}$$

Тут, как правило, второкуры теряются: а что делать дальше?

Вот когда была система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x, y, t) \\ \frac{dy}{dt} = Y(x, y, t) \end{cases}$$

было ясно: и x, и y функции t. А сейчас у нас три равноправные переменные. И что делать? Какая главная?

На самом деле любая, лишь бы это решилось и характеристика была найдена. В данном случае проще начать с простого уравнения:

$$\frac{dy}{-z} = \frac{dz}{-1} \to dy = zdz \to dy = \frac{dz^2}{2} \to y = \frac{z^2}{2} + C_1$$

и тогда уже вернёмся к иксу:

$$\frac{dx}{y + \sin z} = \frac{dz}{-1} \to \frac{dx}{\frac{z^2}{2} + C_1 + \sin z} = \frac{dz}{-1} \to dx = -\left(\frac{z^2}{2} + C_1 + \sin z\right) dz \to x$$
$$= \cos z - \frac{z^3}{6} + C_1 z + C_2$$

Вот мы и задали характеристику как

$$y = \frac{z^2}{2} + C_1$$
$$x = \cos z - \frac{z^3}{6} + C_1 z + C_2$$

Так, а что это за C_1 и C_2? А давайте ещё раз посмотрим на рисунок:

Семейство характеристик, как видно по рисунку, у нас двухпараметрическое! Поэтому и две константы.